1 Problèmes de lieux géométriques

1.1 Trois longueurs égales

Soient trois points A, B et C. Construis une droite coupant (AC) en X et (BC) en Y tels que :

$$AX = XY = YB$$

Solution :

1.1.1 Supposons le problème résolu

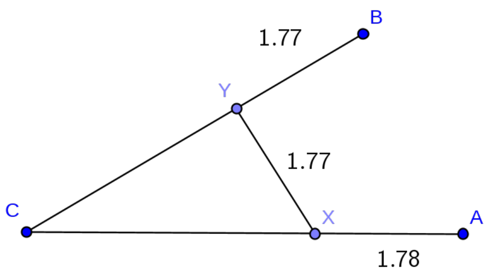

Fig 1.1 : *supposons le problème résolu*

Imaginez que nous connaissions la position d'un des deux points X ou Y (ceci peut s'appeler prendre ses désirs pour des réalités). Alors nous pourrions facilement trouver l'autre point (en traçant une médiatrice). Le problème est que nous ne connaissons la position d'aucun des deux - le problème n'a pas l'air facile.

Accordons-nous un autre désir et *supposons le problème résolu.* C'est-à-dire supposons que Fig. 1.1 est dessinée suivant la condition demandée par notre problème, de telle manière que les trois segments de la ligne brisée $AXYB$ soinent exactement égaux. En faisant ceci, nous imaginons une bonne chose que nous n'avons pas encore : nous imaginons que nous avons trouvé le lieu demandé de la ligne $[XY]$; en fait, que nous *avons trouvé la solution.*

Cependant, c'est bien d'avoir Fig. 1.1 devant nous. Elle montre tous les éléments géométriques que nous devrions examiner, les éléments que nous savons, ceux que nous voulons, les données et la conclusion, assemblées par les conditions demandées. Avec la figure devant nous, nous pouvons deviner quels sont les éléments utiles nous pouvons construire avec les données, et quels éléments pourraient être utiles pour construire la conclusion. Nous pouvons commencer par les données et travailler en avançant, ou bien partir de la conclusion et travailler à reculons - chaque voyage devrait être instructif.

Pouvez-vous assembler au moins quelques pièces du puzzle ? *Pouvez-vous résoudre une partie du problème ?* Il y a un triangle dans Fig 1.1 : XCY. Pouvons-nous le construire ? Nous avons besoin de trois données, mais malheureusement, nous n'en avons qu'une (l'angle $\widehat{C}$).

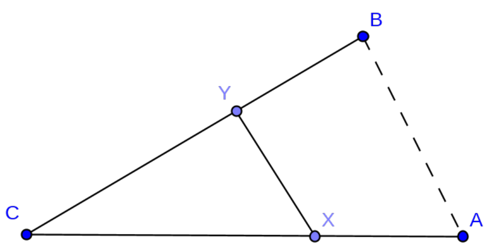

Fig 1.2 : *Travaillons vers l'avant à partir des données*

Utilisez ce que vous avez, vous ne pouvez pas utiliser ce que vous n'avez pas. *Pouvez-vous déduire quelque chos d'utile à partir des données ?* Eh bien, il est facile de joindre les points A et B, et le segment les joignant a des chances d'être utile ; dessinons-le (Fig. 1.2). Cependant il n'est pas facile de voir *comment* le segment $[AB]$ pourrait être utile - devrions-nous l'abandonner ?

La Figure 1.1 a l'air trop vide. Il y a peu de doutes que davantage de lignes seront nécessaires dans la construction désirée - quelles lignes ?

Les segments $[AX]$, $[XY]$ et $[YB]$ sont égaux (nous les considérons égaux - désir pour réalité !). Cependant ils sont dans une position relative tellement étrange - des segments égaux peuvent être réarrangés pour former des figures bien plus belles. Peut-être devrions-nous ajouter d'autres segments égaux - ou juste un autre segment égal pour commencer.

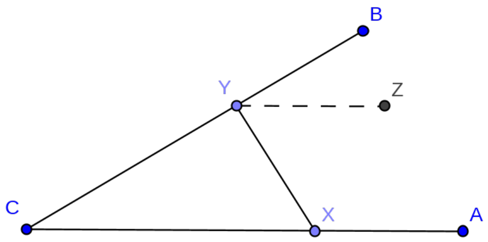

Fig 1.3 : *Travaillons en arrière à partir de la conclusion*

La chance ou l'inspiration peut surgir pour introduire une ligne dans l'image, qui pourrait établir un lien adéquat vers la solution : dessinons le segment $[YZ]$ parallèle à $|XA]$ et de même longueur, cf. Fig. 1.3. (Nous commençons maintenant depuis la conclusion - désir réalisé - et nous remontons vers les données).

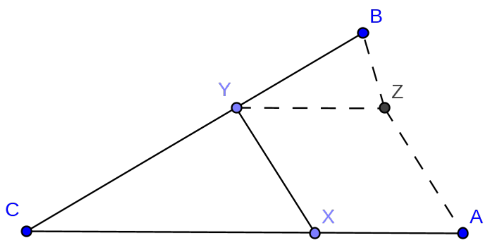

Fig 1.4 : *Contacts entre les connaissances antérieures*

Introduire le segment $|YZ]$ était un essai. Cependant cette ligne n'a pas l'air mal ; elle amène des figures semblables. Joignons Z à A et à B, cf. Fig. 1.4 ; nous obtenons le trapèze $XAZY$ et le triangle isocèle BYZ. *Pouvons-nous résoudre une partie du problème ?* Pouvons-nous construire le triangle BYZ ? Nous aurions besoin de deux données pour un triangle isocèle mais, malheureusement, nous n'en avons qu'une (l'angle en Y est égal à l'angle donné en C). Cependant, nous avons quelque chose là. Même si nous ne connaissons pas le triangle BYZ complètement, nous connaissons sa forme ; même si nous ne connaissons pas sa taille, nous pouvons en construire un semblable.

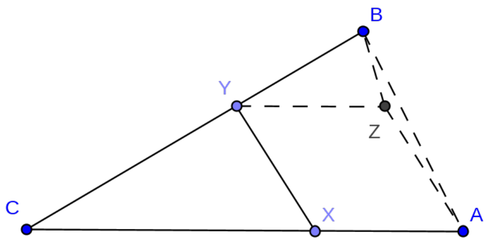

Fig 1.5 : *Superposition*

Ceci pourrait nous rapprocher de la solution, mais nous ne l'avons pas encore : nous devons essayer d'autres choses. Tôt ou tard nous pouvons nous souvenir d'un essai précédent, la Fig. 1.2. Pourquoi ne pas le combiner avec des remarques ultérieures ? En superposant les Figs. 1.2 et 1.4 nous obtenons la Fig. 1.5 dans laquelle il y a un nouveau triangle, BZA. Pouvons-nous le construire ? Nous le pourrions, si nous connaissions BYZ ; dans ce cas favorable, nous pourrions rassembler trois données : deux côtés, ZB et $ZA = ZY$ et l'angle en B. Bien, nous ne connaissons pas BYZ ; ou du moins, nous ne le connaissons pas complètement, nous ne connaissons que sa forme. Cependant, nous pouvons ...

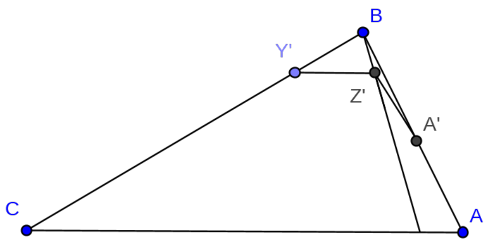

Fig 1.6 : *La clé du problème*

Nous pouvons dessiner le quadrilatère $BY'Z'A'$, cf. Fig. 1.6, semblable au quadrilatère $BYZA$ dans la Fig. 1.5, qui est une partie essentielle de la configuration désirée. Ceci pourrait-être la clé du problème !

1.1.2 Le motif des figures semblables

Nous continuons la construction, dont la découverte est racontée par la suite des Figs. 1.1 - 1.6, nous choisissons un point Y' au hasard (mais pas trop loin de B. Nous dessinons le segment $[Y'Z']$ parallèle à $[CA]$ pour que

$$Y'Z' = Y'B$$

Ensuite, nous déterminons un point A' sur $[AB]$ de façon que

$$A'Z' = Y'Z'$$

Dessinons une parallèle à $(A'Z')$ passant par A et déterminons son intersection avec la droite (BZ') : cette intersection est le point désiré Z. Le reste est facile.

Les deux quadrilatères $AZYB$ et $A'Z'Y'B$ sont non seulement semblables mais aussi homothétiques. Le point B est leur centre d'homothétie. C'est-à-dire, toute droite joignant des points correspondants de deux figures semblables doit passer par B.

Voici une remarque qui peut servir pour les techniques de recherche de problèmes ouverts : de deux figures semblables, celle qui a attiré d'abord notre attention, $AZYB$, a en fait été construite plus tard.

Cet exemple suggère un motif général : *Si vous ne pouvez pas construire la figure demandée, pensez à la possibilité de construire une figure SEMBLABLE à la figure demandée.*

1.2 Tangente commune

Construis une tangente commune à deux cercles donnés.

1.3 Trois médianes

Construis un triangle connaissant ses trois médianes.

1.4 Deux sommets et un angle

Dans un triangle, étant donnés deux sommets A et B et l'angle γ, opposé au côté $[AB]$, le triangle n'est pas déterminé, son troisième sommet (celui de γ) peut varier. Quel est le lieu décrit par ce troisième sommet ?

1.5 Notations

En parlant de triangles, il est commode d'utiliser les notations suivantes :

A, B, C	sommets
a, b, c	côtés
α, β, γ	angles
h_a, h_b, h_c	hauteurs
m_a, m_b, m_c	médianes
d_α, d_β, d_γ	bissectrices des angles ("dissectrices ?")
R	rayon du cercle circonscrit
r	rayon du cercle inscrit

Il est sous-entendu que le côté a est opposé à l'angle α, le sommet A est l'extrémité des segments h_a, m_a et d_α.

L'usage veut que a puisse signifier le segment ou la longueur du côté ; le lecteur doit trouver sa signification, suivant le contexte. La même ambigüité se trouve dans les symboles b, c, h_a, $\ldots$, d_γ, R, r. Nous suivons l'usage bien qu'il soit contestable.

Le problème : "Triangle depuis a, b, c" signifie bien sûr : "Construis un triangle connaissant a, b et c". Observez qu'il peut ne pas y avoir de solution (la figure satisfaisant les conditions peut ne pas exister) si les données sont mal choisies ; par example, il n'y a pas de triangle de côtés a, b et c si $c > a + b$. Trouvez d'abord pour quelles données la figure pourrait exister.

1.6 Deux côtés et une médiane

Triangle depuis a, b, m_a.

1.7 Un côtés, une hauteur et une médiane

Triangle depuis a, h_a, m_a.

1.8 Un côtés, une hauteur et un angle

Triangle depuis a, h_a, α.