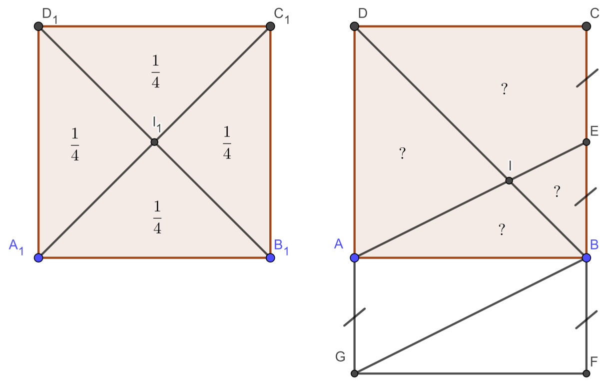
Solutions des aires dans des carrés



1) Une solution de Vincent Douce : le point d'interxection entre $[AE]$ et $[BD]$ est de la forme $(x, 1-x)$ et de la forme $(2\,y, y)$ en même temps ce qui donne $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ et ce $\frac{1}{6}$ est à la fois hauteur et aire, le reste par soustraction.

2) Une solution de Presh Talwalkar : `https://youtu.be/nD9soP3j41A`

3) Une autre solution (trouvée par un élève de Terminale).

Première étape : trouvons une relation entre les aires de AID et EIB.

Dans GBD, $(BG)//(IA)$ donc d'après Thalès, $\dfrac{BI}{BD} = \dfrac{GA}{GD} = \dfrac{1}{3}$, donc $BI = \dfrac{1}{3}BD$ donc $\boxed{BI = \frac{1}{2}ID}$.

Les triangles AID et EIB ont les mêmes angles (opposés par le sommet et alternes-internes) donc ils sont **semblables**, donc leurs longueurs sont **proportionnelles**,

et comme $BI = \dfrac{1}{2}ID$, les **longueurs** du triangle EIB sont égales à la **moitié** de celles de AID,

donc **l'aire de $\boldsymbol{EIB}$ représente $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ de l'aire de $\boldsymbol{AID}$.**

Deuxième étape : trouvons une relation entre les aires de AIB et $ABCD$.

Dans le triangle ABI, appelons H le pied de la hauteur issue de I.

$(IH)//(EB)$ donc d'après Thalès, $\dfrac{AI}{AE} = \dfrac{IH}{EB} = \dfrac{2}{3}$ donc $IH = \dfrac{2}{3}EB$, donc

$$\text{Aire}(AIB) = \frac{AB \times IH}{2} = \frac{AB \times \frac{2}{3}EB}{2} = \frac{AB \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}BC}{2} = \frac{1}{6} \times \text{Aire}(ABCD),$$

donc $\boxed{\text{Aire}(AIB) = \frac{1}{6} \times \text{Aire}(ABCD)}$.

Troisième étape : trouvons toutes les fractions d'aires demandées.

$\text{Aire}(AEB) = \dfrac{1}{4} \times \text{Aire}(ABCD)$, donc $\text{Aire}(EIB) = \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6}\right) \times \text{Aire}(ABCD)$,

donc $\boxed{\text{Aire}(EIB) = \frac{1}{12} \times \text{Aire}(ABCD)}$

donc $\boxed{\text{Aire}(AID) = \frac{4}{12} \times \text{Aire}(ABCD) = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(ABCD)}$

donc $\boxed{\text{Aire}(DCEI) = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) \times \text{Aire}(ABCD) = \frac{5}{12} \times \text{Aire}(ABCD)}$

donc **les 4 fractions recherchées sont : $\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$; $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$; $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$; $\boldsymbol{\dfrac{5}{12}}$.**