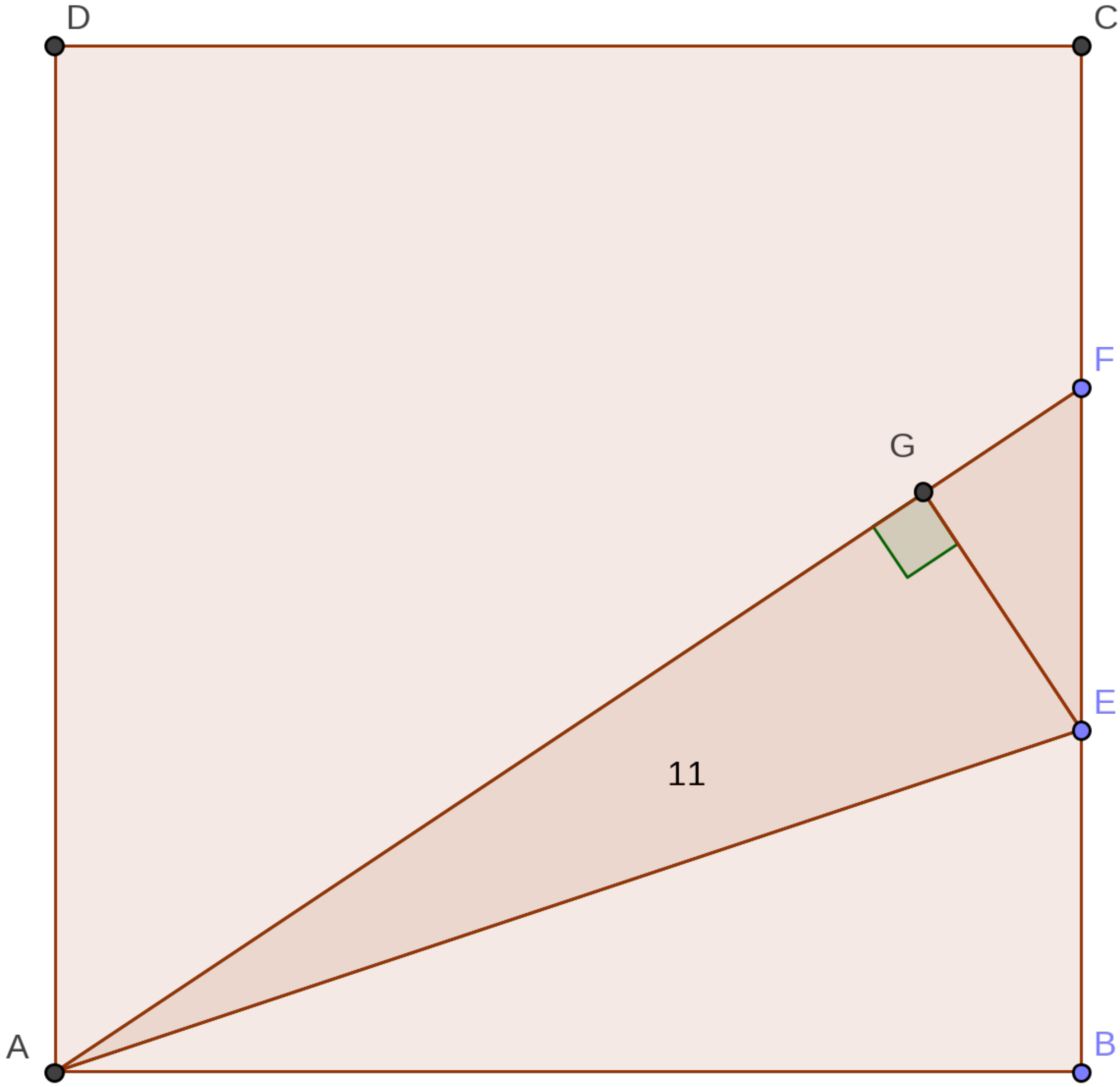
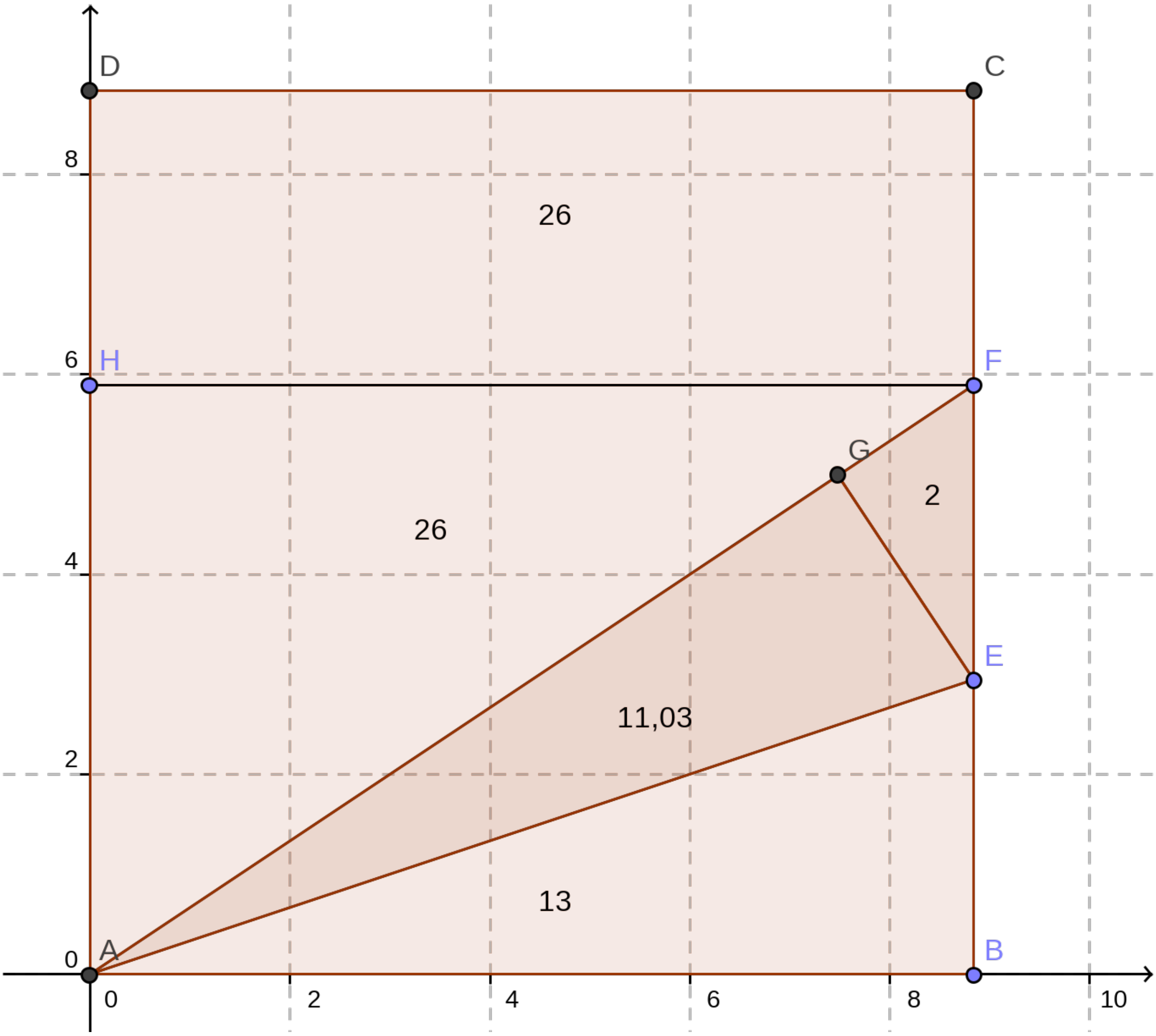
Enigme : le segment $[BC]$ est partagé en trois parts égales et l'aire du triangle rectangle AEG vaut 11 unités d'aire.

Que vaut l'aire du carré $ABCD$?



(*Source :* **L'île des Mathématiques** :
https ://www.ilemaths.net/sujet-calcul-d-aire-triangle-dans-un-carre-886590.html)

Solution 1 : d'après GeoGebra, l'aire du carré semble être 78 untités d'aire.



Solution 2 (rédigée par hdci)

1) Le côté du carré est découpé en 6 parties égales ; on note $6x$ le côté du carré.

2) Cela permet de déterminer la longueur AE en fonction de x et du cosinus de l'angle $\widehat{BAE}$.

3) On exprime la tangente de cet angle "en fonction de x" qui a le bon goût de disparaître par simplification, ce qui permet de trouver la valeur du cosinus et du sinus de cet angle (en fait surtout le cosinus).

4) On remarque que le triangle EGF est semblable au triangle BAF, on peut donc calculer la longueur EG en fonction de x et du cosinus de l'angle $\widehat{GEF}$ qui est égal l'angle $\widehat{BAF}$; on trouve ce cosinus parce qu'on trouve sa tangente comme en 3).

5) Il n'y a plus qu'à déterminer AG puis à exprimer l'aire du triangle. Cela donne $x = \sqrt{\dfrac{13}{6}}$ (d'où l'aire du carré par la suite).

C'est un problème que je trouve particulièrement complexe pour des élèves de collège... (même s'il n'utilise que des notions de trigo de collège, de Pythagore, et d'égalité des angles formés par des paires de droites perpendiculaires ; et encore, est-ce que la relation $cos^2x + sin^2x = 1$ est au programme du collège ?).

SylvieG a écrit : Je suis d'accord que pour un élève de collège, sans la moindre indication, ce n'est pas simple. Ça figure peut-être dans la catégorie "défi" des exercices d'un livre scolaire.

Sinon, les cosinus dans un triangle rectangle sont au programme de 3ème ; et ça suffit pour trouver le résultat demandé. Pas besoin des paires de droites perpendiculaires : l'angle en F commun aux deux triangles rectangles FBA et FGE suffit.

Un petit soucis avec ceci :

Citation : Le côté du carré est découpé en 6 parties égales ; on note $6x$ le côté du carré.

Je vois 3 au lieu de 6.

hdci a répondu : Si on compte les "petits traits horizontaux", cela fait 6 parties.

Effectivement, ces "traits horizontaux" peuvent également avoir pour signification que les trois tiers sont bien de longueur égale, donc que la moitié de ces tros tiers font bien 6 sixièmes de longueur égale ;-) ...

C'était plus pour la relation $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$ que je me posais la question pour le collège (utile pour transformer le $tan\alpha = 1/3$), car quand je fais les fonctions trigonométriques en 1ère spécialité, j'ai l'impression que les élèves découvrent cette relation...

SylvieG a répondu : Oui, les "petits traits horizontaux" sont là pour montrer que le côté du carré est partagé en 3. Ce serait mieux qu'ils soient un peu penchés ;-) Perso, j'ai noté $a = EF = BE = FC$. Et après avoir trouvé la valeur de a^2, j'ai calculé $9a^2$.

Je n'ai pas suivi la même démarche et n'utilise que des cosinus. Par Pythagore, on peut calculer la longueur AF en fonction de a. Le cosinus de l'angle en F des triangles ABF et EGF s'en déduit.

Solution 3 (rédigée par Verdurin)

On peut trouver la réponse en utilisant uniquement le théorème de Pythagore et les formules donnant l'aire d'un triangle et d'un trapèze.

Je pose le coté du carré égale à $6a$.

L'aire de ABE est $6a^2$ et celle de $AFCD$ est $24a^2$. L'aire de AEF est donc $6a^2$.

On a ensuite $AF = a\sqrt{52}$ on en déduit $EG = \dfrac{6a}{\sqrt{13}}$ car $EG \times AF = 12a^2$.

On calcule ensuite AE en utilisant le triangle ABE rectangle en B, puis AG en utilisant le triangle AEG rectangle en G. Sauf erreur de ma part on a $AG = a\dfrac{\sqrt{494}}{\sqrt{13}}$.

On termine en disant que $AG \times GE = 22$ ce qui permet de déterminer $a^2 = \dfrac{143}{3\sqrt{494}}$.

L'aire du carré est donc $\dfrac{143 \times 12}{\sqrt{22^2}} = 78$.

Tous les calculs, que j'espère justes, sont du niveau troisième, mais je trouve que c'est vraiment difficile pour un élève de troisième.

SylvieG a répondu : Bravo verdurin : aucune trigonométrie !

On peut se passer de l'aire d'un trapèze : Les triangles ABE et AEF ont la même aire car hauteur AB commune et bases de même longueur.

Je n'avais pas pensé à déterminer la longueur EG en utilisant l'aire du triangle AEF.

Solution 4 (rédigée par SylvieG)

Posons $b = EF$ et un cosinus : $cos(\widehat{AFB}) = \dfrac{FB}{FA}$ et $AF^2 = 9b^2 + 4b^2 = 13b^2$ D'où $cos(\widehat{AFB}) = \dfrac{2}{13}$.
$cos(\widehat{AFB}) = cos(\widehat{GFE}) = \dfrac{FG}{FE} = \dfrac{FG}{b}$. D'où $FG = \dfrac{2b}{13}$.

$GE^2 = EF^2 - GF^2 = b^2 - \dfrac{4b^2}{13} = \dfrac{9b^2}{13}$. D'où l'aire du triangle EGF : $\dfrac{3b^2}{13}$.

Puis l'aire du triangle AGE en fonction de b : $Aire(AEF) - Aire(EGF) = \dfrac{3b^2}{2} - \dfrac{3b^2}{13} = \dfrac{3}{26}11b^2$.

L'aire du triangle AGE est égale à 11 ; donc $\dfrac{3}{26}b^2 = 1$. Ce qui donne $b^2 = \dfrac{26}{3}$ et enfin $9b^2 = 78$.

Solution 5 (rédigée par dpi et Mathafou)

Uniquement avec Pythagore. En considérant que le petit triangle rectangle EGF est semblable à ABF, j'arrive à un coté du carré égal à 8.6763731 et une aire égale à 75.279450174.

J'ai vérifié que cette aire est bien égale à 6 fois celle du triangle ABE.

Mathafou a répondu : "J'ai vérifié que cette aire est bien égale à 6 fois celle du triangle ABE", certes, mais l'aire de AEG est elle exactement et précisément égale à 11 (et pas "à peu près" 11) non ?

dpi a répondu : Si on pose X le coté du carré on a : $aire(AFE) = \dfrac{X^2}{6}$ et $aire(EFG) = \dfrac{X^2}{6} - 11$. La similitude des triangles ABF et EFG donne $GF = \dfrac{2X}{313}$ et $GE + \dfrac{2X}{9}$ L'aire de EFG est donc aussi$= \dfrac{4X^2}{2713}$.

L'équation du second degré $\dfrac{X^2}{6} - 11 = \dfrac{4X^2}{2713}$ se réduit à $913 - 4x^2 - 59413 = 0$

Racine positive $X = 8.676373100211$ et aire du carré $X^2 = 75.279450170621$.

Mathafou a répondu : calcul faux. Le rapport des aires de deux triangles semblables est le carré du rapport des côtés.

dpi a répondu : Mon erreur est de voir une similitude qui n'en est pas une. Je revois ma copie... Donc en passant par les angles je trouve bien 78 pour l'aire.

Mathafou a répondu : "les angles" ne servent qu'à justifier les triangles semblables et pour ça un seul angle **égal à lui même** suffit.

(L'angle $\widehat{AFB}$ qui est **le même** angle que $\widehat{GFE}$, donc les triangles rectangles ABF et FGE semblables).

dpi a répondu : Je voulais rester sur une équation sans trigo. Mais j'avais une erreur sur la similitude... Le rapport entre le petit et le grand coté du triangle EGF est $\dfrac{2}{3}$ et comme l'hypoténuse$= \dfrac{X}{3}$.

On trouve $\dfrac{2X}{13}$ et $\dfrac{3X}{13}$ Ce qui donne une aire de $\dfrac{3X^2}{119} = \dfrac{X^2}{39}$.

L'aire de AEF est égale à $\dfrac{X^2}{6}$ et à $11 + \dfrac{X^2}{39}$.

L'équation cherchée devient : $11X^2 - 858 = 0$. La racine positive est égale à 8.831760866328 et l 'aire 78.

Mathafou a répondu : $11X^2 = 858$ donc $X^2 = l'aire = \dfrac{858}{11} = 78$.

Solution 6 (rédigée par SylvieG)

Je propose ci-dessous une solution, inspirée de celle de Verdurin, sans cosinus, uniquement avec Pythagore et des aires de triangles.

En posant $b = EF$. Calcul de GE : $Aire(AEF) = 3b \times \dfrac{b}{2}$ et $Aire(AEF) = AF \times \dfrac{GE}{2}$.

D'où $AF \times GE = 3b^2$.

$AF^2 = 9b^2 + 4b^2 = 13b^2$. D'où $GE = \dfrac{3b}{13}$.

Calcul de AG : $AG^2 = AE^2 - GE^2 = 9b^2 + b^2 - 9b^2/13 = \dfrac{121b^2}{13}$

D'une part $AG \times GE = 22$. D'autre part $AG \times GE = \dfrac{3b}{13} \times \dfrac{11b}{13} = \dfrac{311b^2}{13}$.

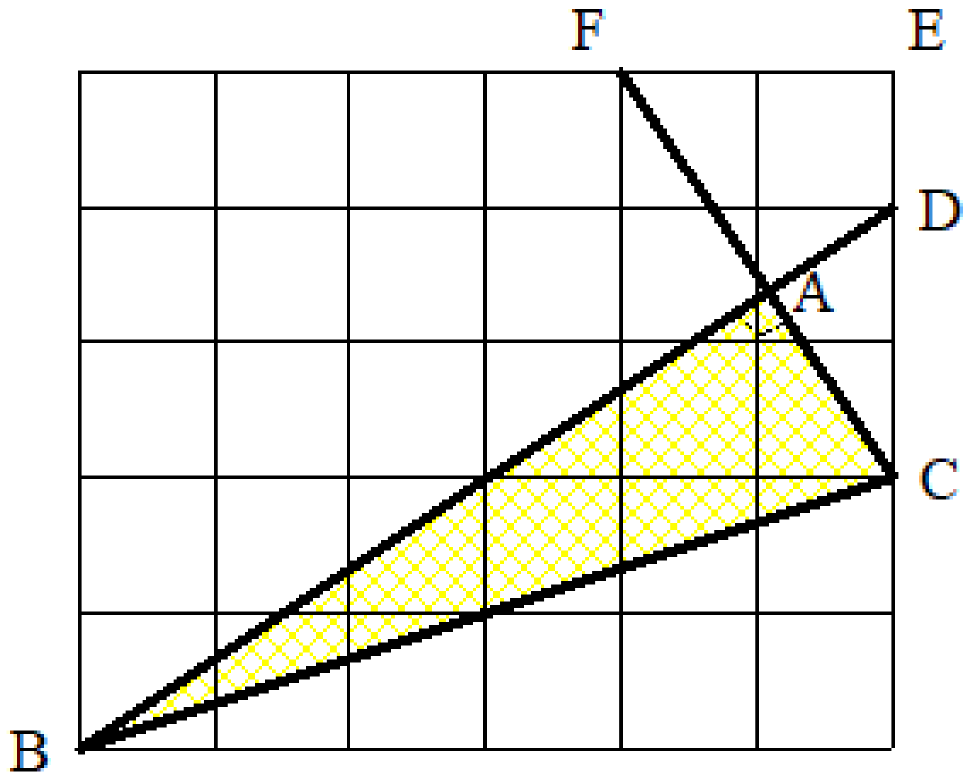
D'où $b^2 = \dfrac{213}{3}$. Et le résultat : $9b^2 = 613 = 78$.

Solution 7 (rédigée par Imod)

En dehors des calculs adressés aux collégiens ou lycéens , il est amusant pour un enseignant de voir comment l'exercice a été construit .

On peut s'interroger sur le côté miraculeux de la réponse entière mais il n'y a rien d'étonnant car l'exercice a été fabriqué exprès pour ce résultat .

Je fais un petit dessin sur un quadrillage orthonormé :



On calcule directement $A(BDC) = 6$, $A(CEF) = 3$
et comme CEF et ADC sont semblables , $A(ADC) = \dfrac{12}{13}$.
On a alors $A(ABC) = \dfrac{66}{13}$ et l'aire du carré recherché $A(carre) = 36$.

On a donc un rapport $\dfrac{A(carre)}{A(ABC)} = \dfrac{78}{11}$ et on voit pourquoi on a choisi 11 pour l'aire du triangle .